

Zufallsexperimente

Die Stochastik ist eine relativ junge Disziplin der Mathematik. Erst Mitte des 17. Jahrhunderts setzten sich die Forscher mit Themen der Stochastik intensiv auseinander. Hintergrund waren einige Beobachtungen im Zusammenhang mit Glücksspielen, die logisch nicht zu erklären waren.

Beispiel (Problem von de Mere):

Bei einem Glücksspiel werden beim viermaligen Werfen eines Würfels das Auftreten von mindestens einer Sechs bzw. beim 24-fachen Werfen von zwei Würfeln das Auftreten von mindestens einer Doppelsechs betrachtet.

Die Frage ist, welche Variante wahrscheinlicher ist.

Die Gewinnchancen sind bei der ersten Variante höher.

Definition:

Ein Experiment, bei dem mehrere Ergebnisse möglich sind, nennt man Zufallsexperiment. Das Ergebnis eines Versuchs kann nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden, es hängt vom Zufall ab.

Beispiel: Werfen eines Würfels

Mögliche Ergebnisse: 1, 2, 3, 4, 5, 6 $\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eine Menge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ heißt Ergebnisraum eines Zufallsexperimentes, wenn

- a) die Elemente von Ω mögliche Ergebnisse des Zufallsexperimentes sind.
- b) jedem möglichen Ergebnis des Zufallsexperimentes genau ein Element von Ω entspricht.

Bemerkungen:

1. Die Anzahl $|\Omega|$ der Ergebnisse des Ergebnisraumes Ω heißt Mächtigkeit von Ω .
2. Zu einem Zufallsexperiment lassen sich in vielen Fällen verschiedene Ergebnisräume konstruieren, zum Beispiel beim Werfen eines Würfels

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Omega_2 = \{g, u\} \quad (\text{gerade Augenzahl, ungerade Augenzahl})$$

Man bezeichnet den Ergebnisraum Ω_2 als eine Vergröberung des Ergebnisraums Ω_1 .

Umgekehrt heißt Ω_1 eine Verfeinerung des Ergebnisraums Ω_2 .

Beispiele:

1. Ein Glücksrad mit drei Sektoren (1, 2, 3) wird in Bewegung gesetzt und es wird festgestellt, in welchen Sektor der Pfeil zeigt.

$$\Omega = \{1, 2, 3\} \quad |\Omega| = 3$$

2. Werfen einer Münze

$$\Omega = \{K, Z\} \Rightarrow |\Omega| = 2$$

3. Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit sechs Kugeln, wobei drei rot, zwei weiß und eine gelb ist.

$$\Omega = \{r, w, g\} \Rightarrow |\Omega| = 3$$

4. Ziehen eines Loses aus einem Lostopf, der Gewinne und Nieten enthält.

$$\Omega = \{G, N\} \Rightarrow |\Omega| = 2$$

(Experimente, bei denen nur zwei verschiedene Ergebnisse möglich sind, sind in der Stochastik von großer Bedeutung)

Mehrstufige Zufallsexperimente

Beispiele:

1. Zweimaliges Werfen einer Münze

Veranschaulichung mit Hilfe eines Baumdiagramms:

$$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$$

- 2.0 In einer Urne befinden sich drei rote, zwei weiße und eine gelbe Kugel.

- 2.1 Es werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

- 2.2 Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

$$2.1 \quad \Omega = \{rr, rw, rg, wr, ww, wg, gr, gw, gg\}$$

$$2.2 \quad \Omega = \{rr, rw, rg, wr, ww, wg, gr, gw\}$$