

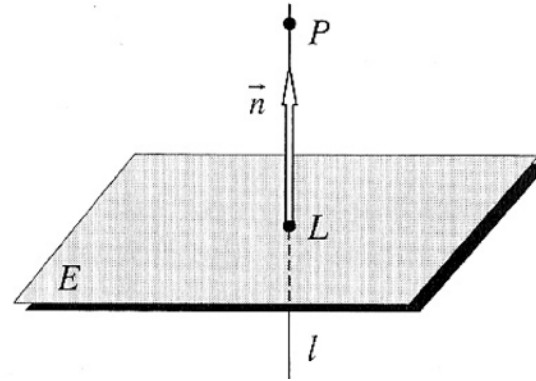
Instruktion

Abstandsberechnungen



Berechnung des Abstandes eines Punktes P von einer Ebene E

1) Lotfußpunktmethode



Vorgehen zur Bestimmung des Abstandes des Punktes P von der Ebene E:

- Aufstellen einer Geraden l , die senkrecht auf der Ebene E steht und den Punkt P enthält (der Normalenvektor der Ebene E ist damit der Richtungsvektor der gesuchten Geraden l und der Aufhängepunkt der Geraden l ist P).
- Schnittpunkt L der Geraden l mit der Ebene E berechnen (L nennt man Lotfußpunkt).
- Der Abstand des Punktes P zur Ebene E ist dann die Länge des Vektors $\overrightarrow{LP}$.

2) Abstandsformel

Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene E kann auch mit Hilfe der folgenden Abstandsformel berechnet werden:

$$d(P;E) = \left| \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - n_0}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$$

Hinweis:

Das konstante Glied n_0 muss unbedingt negativ sein. Gegebenenfalls muss die Normalenform der Ebene E mit (-1) multipliziert werden.

Beispiel: $E: 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 13 = 0$ $P(3/2/7)$

Bestimme Gerade l durch $P(3/2/7)$, die auf E senkrecht steht: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$l \cap E = \{F\} \Rightarrow 5(3+5s) - 3(2-3s) + 4(7+4s) + 13 = 0 \Rightarrow s = -1$$

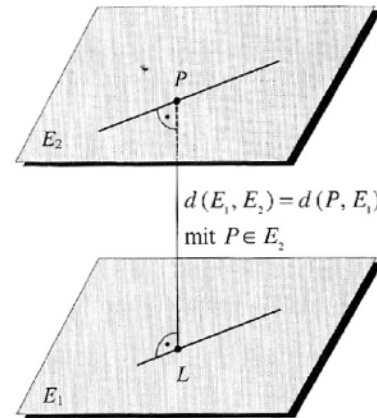
$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow d(P;E) = |\vec{FP}| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{50}$$

Alternative:

$E: -5x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 13 = 0$ (das konstante Glied muss negativ sein !!)

$$d(P;E) = \left| \frac{-5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 7 - 13}{\sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2}} \right| = \left| \frac{-50}{\sqrt{50}} \right| = \frac{50}{\sqrt{50}} = \sqrt{50}$$

Berechnung des Abstandes zweier paralleler Ebenen



Die Berechnung des Abstandes zweier paralleler Ebenen kann auf den Fall Abstand eines Punktes von einer Ebene zurückgeführt werden. Der Abstand zweier paralleler Ebenen E_1 und E_2 ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der Ebene E_2 von der Ebene E_1 :

$$d(E_1; E_2) = d(P; E_1).$$

Aufgaben:

$$1 \quad E_1: 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 5 = 0 \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d(E_1; E_2) = d(A; E_1) \text{ mit } A(0/0/4)$$

$$\text{Gerade } l \text{ durch } A, \text{ die senkrecht auf } E_1 \text{ steht: } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$l \cap E_1 = \{F\} \Rightarrow 2 \cdot 2s + 2 \cdot 2s + 4 + s + 5 = 0 \Rightarrow s = -1$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow d(E_1; E_2) = |\vec{f}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 3$$

$$2 \quad E_1: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 16 = 0 \quad E_2: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 24 = 0$$

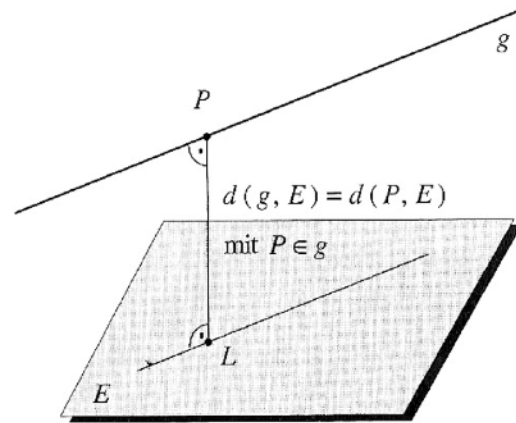
$$\text{Bestimme Punkt } P \in E_1: x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \Rightarrow -4x_2 - 16 = 0 \Rightarrow x_2 = -4 \Rightarrow P(0 / -4 / 0)$$

$$\text{Bestimme Gerade } l \text{ durch } P, \text{ die senkrecht auf der Ebene } E_2 \text{ steht: } l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$l \cap E_2 = \{F\} \Rightarrow 3 \cdot 3s - 4(-4 - 4s) + 5 \cdot 5s - 24 = 0 \Rightarrow s = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{25} \\ -\frac{116}{25} \\ \frac{20}{25} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow d(E_1; E_2) = |\overrightarrow{FP}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ \frac{16}{25} \\ -\frac{20}{25} \end{pmatrix} \right| = \frac{4}{5} \sqrt{2}$$

Berechnung des Abstandes einer Geraden von einer parallelen Ebenen



Auch die Berechnung des Abstandes einer Geraden g von einer parallelen Ebene E kann auf den Fall Abstand eines Punktes von einer Ebene zurückgeführt werden. Der Abstand einer Geraden g von einer parallelen Ebene E ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der Geraden g von der Ebene E : $d(g;E) = d(P;E)$.

Aufgabe:

Bestimmen Sie den Abstand der Ebene $E: -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8 = 0$ und der zu E parallelen Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimme Gerade l durch $P(5/-3/2)$, die senkrecht auf E steht: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$l \cap E = \{F\} \Rightarrow -(5-s) + 4(-3+4s) + 2(2+2s) - 8 = 0 \Rightarrow s = 1$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow d(g; E) = |\overrightarrow{FP}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{21}$$

ONLINE ABITURVORBEREITUNG

Vom **13.04. bis 13.05.2026** bietet
die VIBOS eine **kostenlose**
Abiturvorbereitung in den
Abschlussprüfungsfächern für
die Zweige Sozialwesen, Technik,
Wirtschaft und Verwaltung sowie
Internationale Wirtschaft an. Es ist
keine Anmeldung und keine
Registrierung nötig.

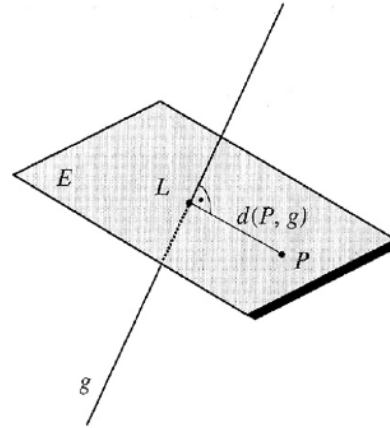
Jetzt informieren auf **vibos.de**



KOSTENLOS TEILNEHMEN

VIBOS
Virtuelle Berufsbildung Bayern

Berechnung des Abstandes eines Punktes P von einer Geraden g



Vorgehen zur Bestimmung des Abstandes des Punktes P von der Gerade g:

- a) Aufstellen einer Hilfsebene E, die senkrecht auf der Geraden g steht und den Punkt P enthält (der Richtungsvektor der Geraden g ist damit der Normalenvektor der gesuchten Ebene E).
- b) Schnittpunkt L der Geraden g mit der Ebene E berechnen.
- c) Der Abstand des Punktes P zur Geraden g ist dann die Länge des Vektors $\overrightarrow{LP}$.

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad Q(5/3/6)$

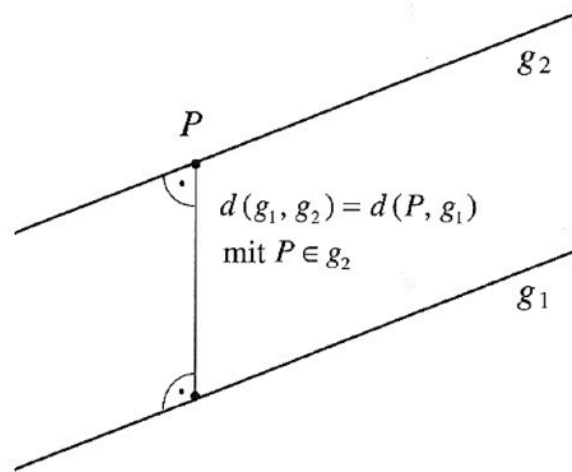
Bestimme Hilfsebene E, die auf g senkrecht steht und Q enthält.

$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Rightarrow E: 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5 = 0$$

$$g \cap E = \{F\} \Rightarrow 4(2 + 4t) + 3(10 + 3t) - 4(-2 - 4t) - 5 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow d(Q; g) = |\overrightarrow{FQ}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 9$$

Berechnung des Abstandes zweier paralleler Geraden



Die Berechnung des Abstandes zweier paralleler Geraden kann auf den Fall Abstand eines Punktes von einer Geraden zurückgeführt werden. Der Abstand zweier paralleler Geraden g_1 und g_2 ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der Geraden g_2 von der Geraden g_1 :

$$d(g_1; g_2) = d(P; g_1).$$

Beispiel: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

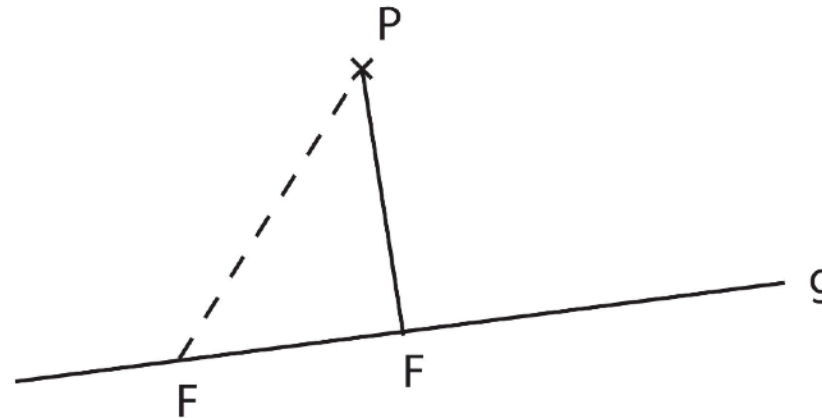
Bestimme Hilfsebene E, die auf g_1 senkrecht steht und $P(1/0/1) \in g_2$ enthält.

$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow E: 2x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0$$

$$g_1 \cap E = \{F\} \Rightarrow 2(2+2s) - (1-s) - (2-s) - 1 = 0 \Rightarrow s = 0$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow d(g_1; g_2) = |\overrightarrow{FP}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$

Alternative zur Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden



Vorgehen zur Bestimmung des Abstandes des Punktes P von der Geraden g:

- Den allgemeinen Vektor $\vec{d} = \vec{FP}$ aufstellen, der gebildet wird von einem beliebigen Punkt $F \in g$ und dem gegebenen Punkt P.
- Den Vektor $\vec{FP}$ so bestimmen, dass $\vec{FP}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden g steht, d.h. $\vec{FP} \circ \vec{r}_g = 0$.
- Der Abstand des Punktes P zur Geraden g ist dann die Länge des Vektors $\vec{FP}$.

Beispiel: $\vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad P(5/3/6)$

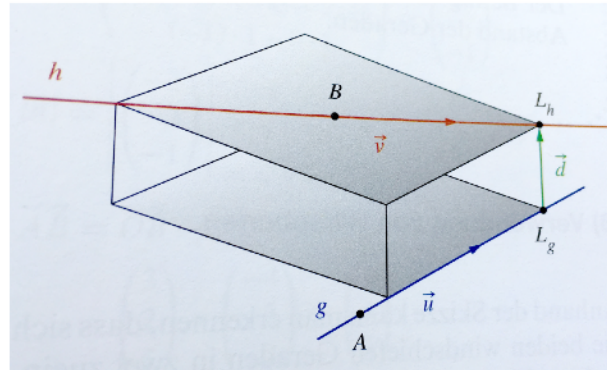
$$\vec{d} = \vec{FP} = \vec{p} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+4t \\ 10+3t \\ -2-4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4t \\ -7-3t \\ 8+4t \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} \circ \vec{r}_g = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-4t \\ -7-3t \\ 8+4t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow 4(3-4t) + 3(-7-3t) - 4(8+4t) = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \vec{FP} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow d(P;g) = |\vec{FP}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 9$$

Berechnung des Abstandes zweier windschiefer Geraden

1) Lotfußpunktverfahren



Die kürzeste Entfernung zwischen den beiden Geraden entspricht dem Betrag des Verbindungsvektors $\vec{d}$, der zu beiden Geraden orthogonal ist.

Die Lotfußpunkte L_g und L_h liegen auf den Geraden g und h , also lassen sich ihre Ortsvektoren mithilfe der Geradengleichungen $\vec{OL_g} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}$ und $\vec{OL_h} = \vec{OB} + s \cdot \vec{v}$ darstellen.

$\vec{d}$ ist der Verbindungsvektor der beiden Lotfußpunkte L_g und L_h und muss senkrecht auf den Richtungsvektoren beider Geraden stehen, also $\vec{d} \circ \vec{u} = 0$ und $\vec{d} \circ \vec{v} = 0$.

Beispiel:

Bestimmen Sie den Abstand der windschiefen Geraden

$$\vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{h}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{OL_g} = \begin{pmatrix} -4-r \\ -3 \\ 2+2r \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OL_h} = \begin{pmatrix} 3+s \\ 2+s \\ 5-4s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 3+s \\ 2+s \\ 5-4s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4-r \\ -3 \\ 2+2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+s+r \\ 5+s \\ 3-4s-2r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7+s+r \\ 5+s \\ 3-4s-2r \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -1-9s-5r=0 \quad \begin{pmatrix} 7+s+r \\ 5+s \\ 3-4s-2r \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 18s+9r=0$$

$$(I) \quad 9s+5r=-1$$

$$(II) \quad 18s+9r=0$$

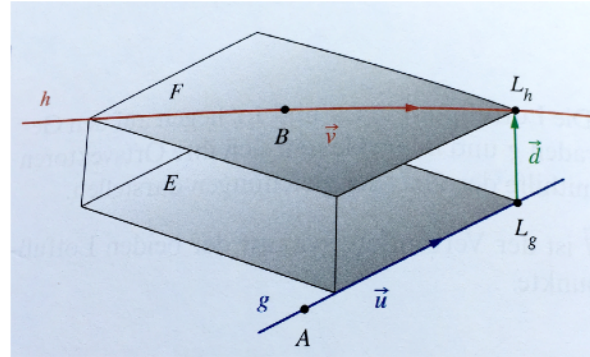
$$2 \cdot (I) - (II): r = -2$$

$$(I) \Rightarrow 9s-10=-1 \Rightarrow s=1$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 7+1-2 \\ 5+1 \\ 3-4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow d(g;h) = |\vec{d}| = \sqrt{36+36+9} = 9$$

Berechnung des Abstandes zweier windschiefer Geraden

2) Verwendung von Hilfsebenen



Anhand der Skizze kann man erkennen, dass sich die beiden windschiefen Geraden in zwei zueinander echt parallele Ebenen einbetten lassen:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \qquad F: \vec{x} = \vec{b} + t \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$$

Da der kürzeste Verbindungsvektor $\vec{d}$ zu beiden Geraden senkrecht steht, ist er ein Normalenvektor dieser beiden Ebenen.

Offenbar ist der Abstand der beiden Geraden genauso groß wie der Abstand der beiden Ebenen und dieser ist damit genauso groß wie der Abstand eines Punktes der einen Ebene von der anderen Ebene.

Beispiel:

Bestimmen Sie den Abstand der windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad E: -2x_1 - 2x_2 - x_3 + d = 0$$

$$A(-4/-3/2) \text{ einsetzen: } 8 + 6 - 2 + d = 0 \Rightarrow d = -12 \quad \Rightarrow E: -2x_1 - 2x_2 - x_3 - 12 = 0$$

Abstand des Punktes B von der Ebene E: Hilfsgerade l aufstellen: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$

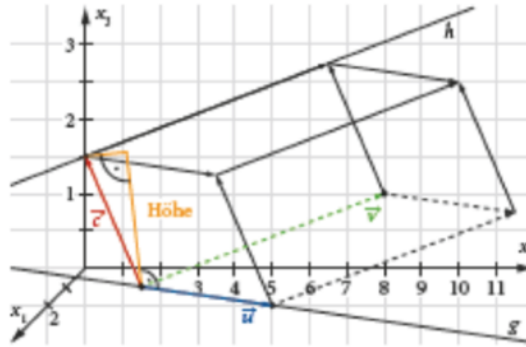
l in E einsetzen: $-2(3-2s)-2(2-2s)-(5-s)-12=0 \Rightarrow s=3$

$$\Rightarrow \vec{l} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(g;h) = |\vec{LB}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36+36+9} = 9$$

Berechnung des Abstandes zweier windschiefer Geraden

3) Berechnung des Abstands mithilfe eines Spats



Der Abstand zwischen g und h ist der kürzeste Abstand zwischen Punkten aus g und h . Dieser Abstand entspricht der Länge des Vektors, der senkrecht auf beiden Geraden steht. Dieser Vektor wird die Höhe eines Spats sein, den wir nun konstruieren:

Der Spat wird durch drei Vektoren aufgespannt. Als Grundfläche wählen wir das Parallelogramm, das die beiden Richtungsvektoren von g und h bilden und der dritte Vektor ist die Differenz der beiden Aufhängepunkte von g und h .

Die Höhe des Spats (in der Skizze orange) steht senkrecht auf der Grundfläche. Fasst man die Höhe als Vektor auf, so bildet dieser einen rechten Winkel zu jedem der beiden Richtungsvektoren und damit auch zu den Geraden g und h . Die Höhe stellt damit genau den gesuchten Abstand zwischen beiden Geraden her.

Beispiel:

Bestimmen Sie den Abstand der windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$V_{\text{Spat}} = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \Rightarrow \text{Höhe} = \frac{V_{\text{Spat}}}{\text{Grundfläche}}$$

$$\text{Grundfläche } A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$V_{\text{Spat}} = \left| \left(\vec{u} \times \vec{v} \right) \circ \vec{c} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = |-14 - 10 - 3| = 27$$

$$\Rightarrow d(g;h) = \text{Höhe} = \frac{V_{\text{Spat}}}{\text{Grundfläche}} = \frac{27}{3} = 9$$