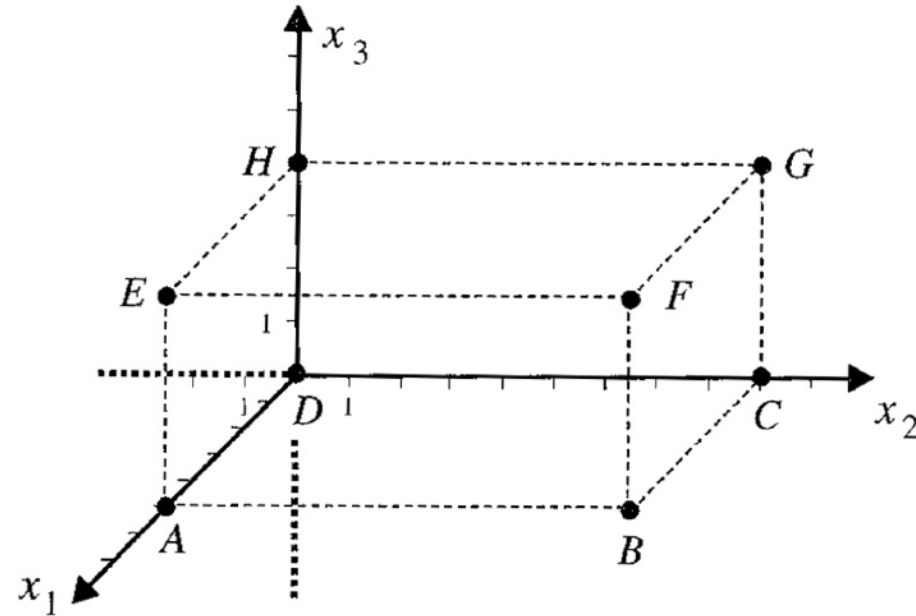


Instruktion

Vektoren



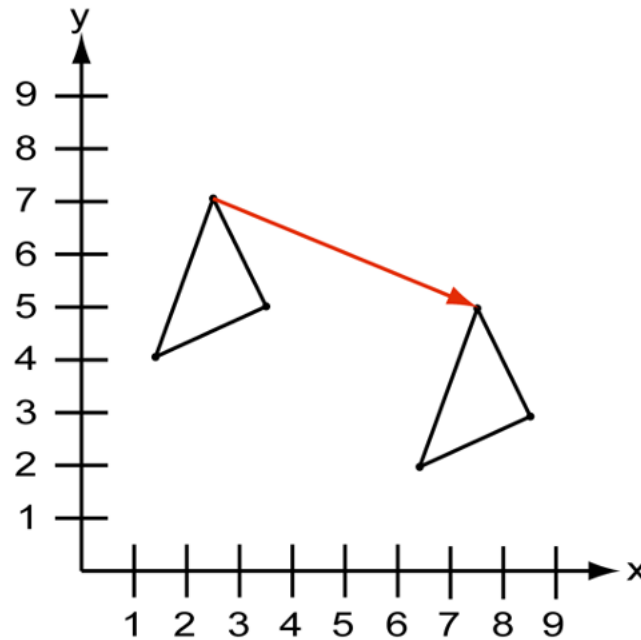
Der Vektorbegriff



Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Quaders.

A(5/0/0), B(5/9/0), C(0/9/0), D(0/0/0), E(5/0/4), F(5/9/4), G(0/9/4), H(0/0/4)

In der folgenden Abbildung ist eine Verschiebung (Translation) dargestellt. Dabei wird durch einen Verschiebungspfeil (Vektor) jedem Punkt P der Ebene oder Raumes genau ein Bildpunkt P' zugeordnet.



Die Menge aller Pfeile einer Translation wird als Verschiebungsvektor oder kurz Vektor bezeichnet.

Länge eines Vektors:

Die Maßzahl für die Länge eines Vektors $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ (Betrag von $\vec{a}$ bezeichnet.

In der Ebene: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ Im Raum: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Der Vektor mit der Länge Null heißt Nullvektor.

Im Raum gilt: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \vec{a} \\ \text{Diagram of a vector in a 2D plane with horizontal component 4 and vertical component 3, forming a right triangle.} \end{array} \quad \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

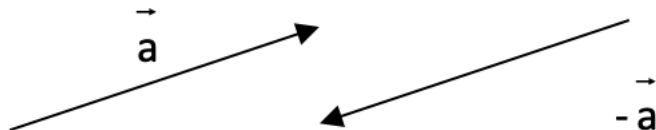
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

Weitere wichtige Vektoren

1) Gegenvektor:

Ein zu einem Vektor $\vec{a}$ entgegengesetzt orientierter Vektor gleicher Länge heißt Gegenvektor oder inverser Vektor zu $\vec{a}$.

Bezeichnung: $\vec{-a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$



2) Einheitsvektor:

Ein Vektor der Länge 1 heißt Einheitsvektor oder normierter Vektor.

Bezeichnung: $\vec{a}$

3) Verbindungsvektor zweier Punkte

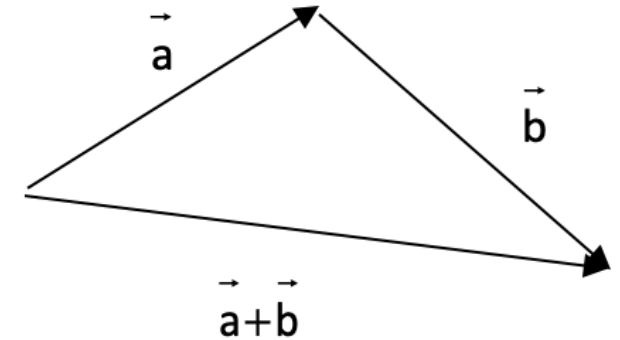
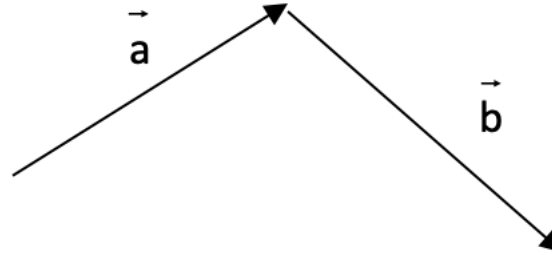
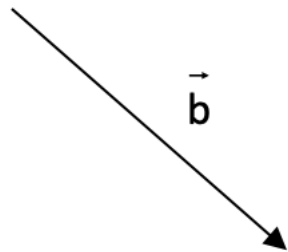
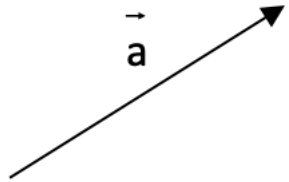
$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} \quad \text{„Spitze minus Fuß“}$$

4) Ortsvektor

Die Translation, die den Ursprung 0 in den Punkt P abbildet, heißt Ortsvektor von P.

Bezeichnung: $\overrightarrow{OP}$ oder $\vec{p}$ $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \\ p_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Addition von Vektoren



$$\text{Im } \mathbb{R}^2: \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im } \mathbb{R}^3: \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

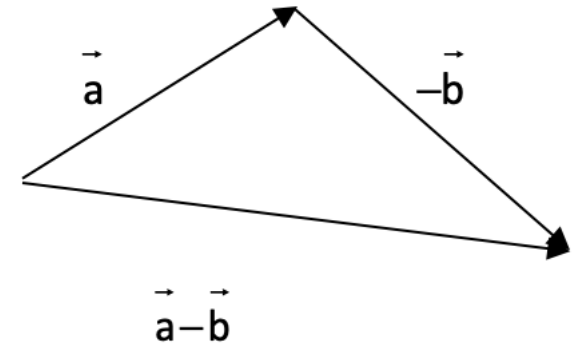
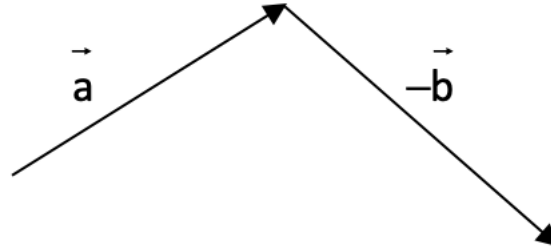
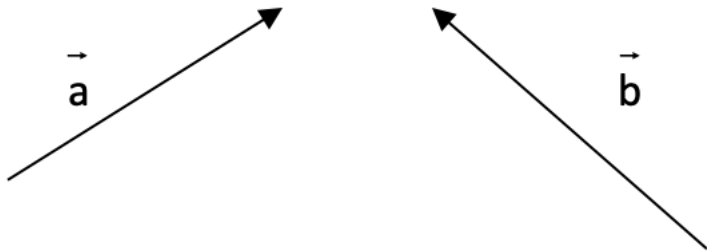
Eigenschaften der Vektoraddition:

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ der Ebene oder des Raumes gilt:

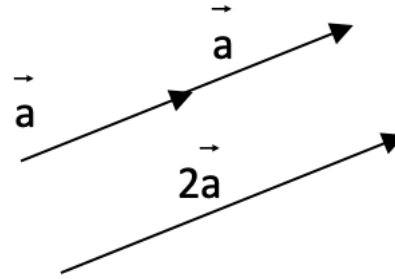
- a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommutativgesetz
- b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ Assoziativgesetz
- c) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (Neutrales Element)
- d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (Inverses Element)

Subtraktion von Vektoren

Die Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird gebildet, indem man zu $\vec{a}$ den Gegenvektor von $\vec{b}$ addiert. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (S-Multiplikation)



Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man jede Koordinate mit dieser Zahl multipliziert.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \end{pmatrix} \quad \alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Folgerung:

Durch die Multiplikation mit einer reellen Zahl kann jeder Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ zu einem

Einheitsvektor normiert werden: $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Anwendungen zum Rechnen mit Vektoren

(1) Gleichheit zweier Vektoren:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann gleich, wenn ihre entsprechenden Komponenten übereinstimmen.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{array}$$

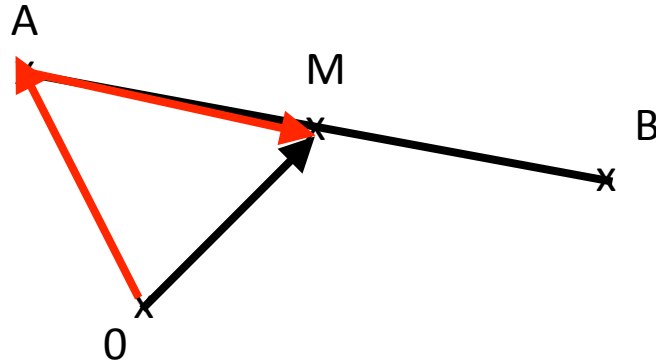
(2) Parallelität von Vektoren:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann parallel, wenn gilt:

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b_1 = \alpha \cdot a_1 \\ b_2 = \alpha \cdot a_2 \\ b_3 = \alpha \cdot a_3 \end{array}$$

Anwendungen zum Rechnen mit Vektoren

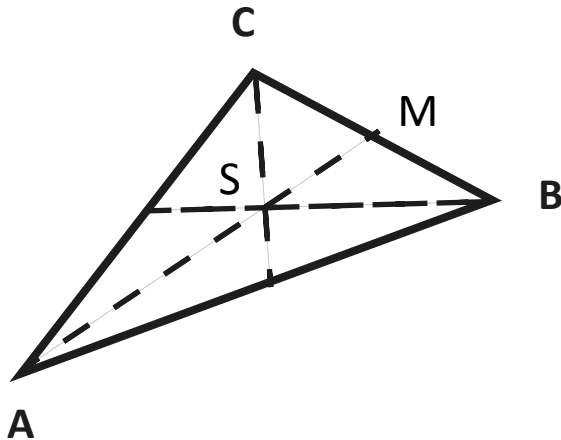
(3) Mittelpunkt einer Strecke:



$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

(4) Schwerpunkt eines Dreiecks:



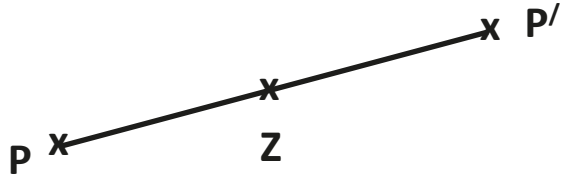
$$\begin{aligned} \vec{OS} &= \vec{OA} + \vec{AS} = \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{2}{3} (\vec{AB} + \vec{BM}) = \vec{OA} + \frac{2}{3} \left(\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} \right) = \\ &= \vec{OA} + \frac{2}{3} \left((\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{2} (\vec{c} - \vec{b}) \right) = \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} - \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{c} - \frac{1}{3} \vec{b} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} \end{aligned}$$

$$\vec{OS} = \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

Anwendungen zum Rechnen mit Vektoren

(5) Spiegelpunkt:



$$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{PP'} = \vec{OP} + 2 \cdot \vec{PZ} = \vec{p} + 2 \cdot (\vec{z} - \vec{p}) = \vec{p} + 2\vec{z} - 2\vec{p} = 2\vec{z} - \vec{p}$$

$$\vec{OP'} = 2\vec{z} - \vec{p}$$

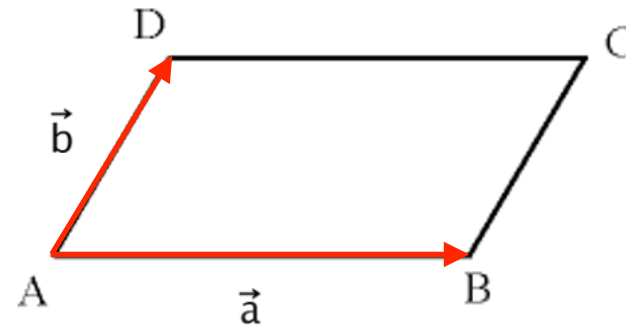
Linearkombination von Vektoren

Beispiele:

1) Parallelogramm:

Gegeben ist das Parallelogramm ABCD, das durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ aufgespannt wird.

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

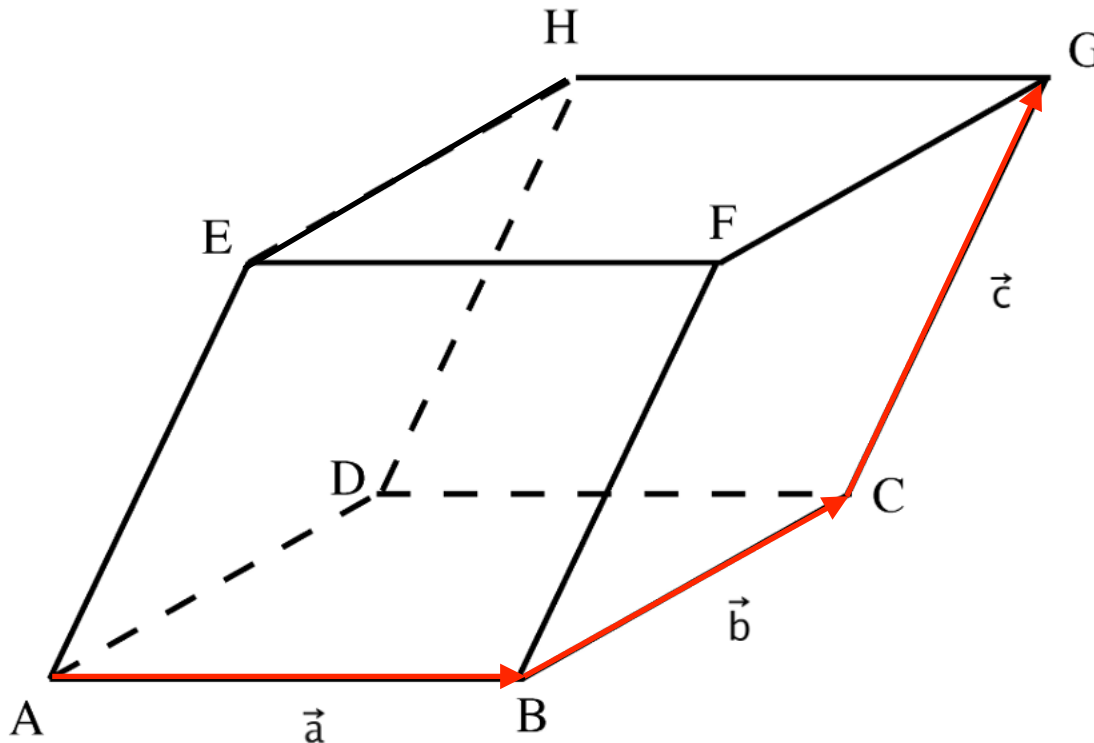
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$$

Linearkombination von Vektoren

2) Parallelfach (Spat):

Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CG}$ spannen ein Parallelfach auf.

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AH}$ und $\overrightarrow{BH}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{a} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \vec{b} + \vec{c}$$

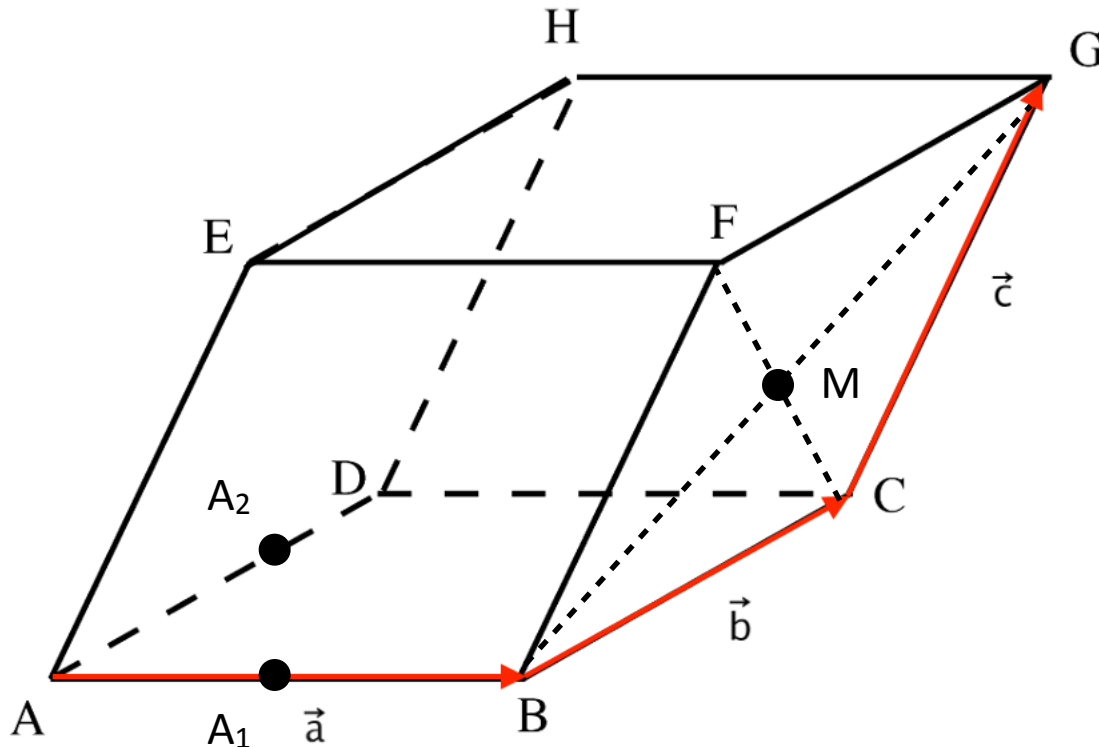
$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Linearkombination von Vektoren

Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CG}$ spannen ein Parallelepiped auf.

Gegeben sind ferner $\overrightarrow{AA_1} = \frac{2}{5}\vec{a}$ und $\overrightarrow{AA_2} = \frac{4}{7}\vec{b}$.

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{A_1G}$, $\overrightarrow{A_2F}$ und $\overrightarrow{A_1M}$, wobei M der Mittelpunkt des Parallelogramms BCGF ist, durch die gegebenen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



$$\overrightarrow{A_1G} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \frac{3}{5}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{A_2F} = \overrightarrow{A_2D} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \frac{3}{7}\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} - \frac{4}{7}\vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

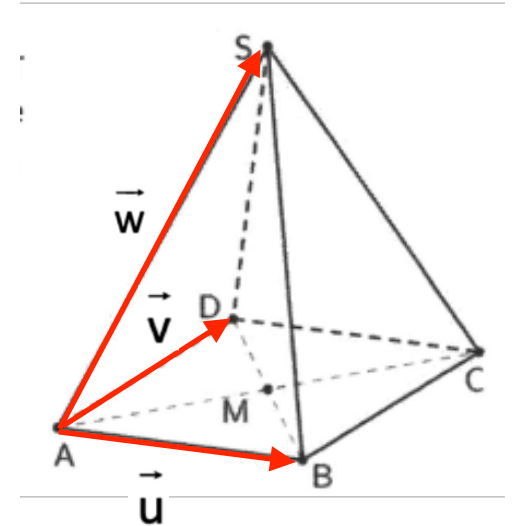
Linearkombination von Vektoren

Im $\mathbb{R}^3$ ist die vierseitige Pyramide ABCDS mit der rechteckigen Grundfläche ABCD gegeben (siehe Abbildung). Ferner sind die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{w} = \overrightarrow{AS}$ gegeben. (Abitur 2025 Teil 1)

Für den Punkt P gilt: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{w}$

Benennen Sie die besondere Eigenschaft des Punktes P bezüglich des Dreiecks ABS.

Der Punkt M ist der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche ABCD. Geben Sie den Vektor $\overrightarrow{MS}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ an.



Der Punkt P ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABS.

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AS} = -\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}$$