Jochen Weber

Aufgaben zu Integral der e-Funktion

1.0 Geben Sie zu folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an.

1.1 $f(x)=e^{2x}$

1.2 $f(x)=e^{1-2x}$

1.3 $f(x)=2\cdot e^{5x+1}$

1.4 $f(x)=\dfrac{2}{(e^x)^2}$

1.5 $f(x)=1-e^{2-x}$

1.6 $f(x)=e^x+e^{-x}$

1.7 $f(x)=x^2+e^{-2x}$

1.8 $f(x)=\dfrac{2}{e^x}$

1.9 $f(x)=\dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$

2.0 Berechnen Sie das bestimmte Integral.

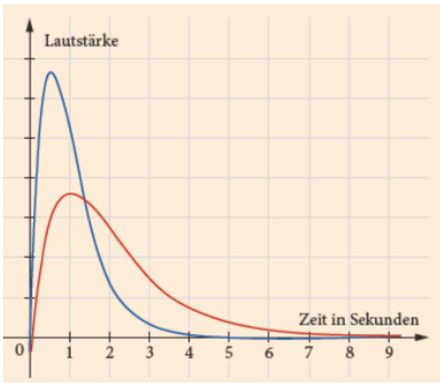
2.1 $\int_2^1 3e^{2x}\,dx$

2.2 $\int_2^0 (e^x+e^{3x+1})\,dx$

2.3 $\int_2^{\ln 2} (1-e^x)^2\,dx$

3.0 Während eines Poetry-Slams wird die Zustimmung zum Vortrag zweier Kandidaten A und B durch die Lautstärke des Applauses des Publikums bestimmt.

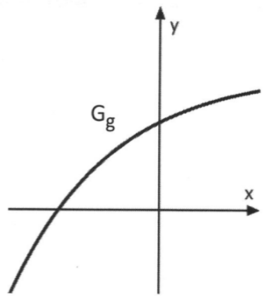
3.1 Die Graphen der Funktionen f mit $f(x)=4x\cdot e^{-x+1}$ und g mit $g(x)=2x\cdot e^{-2x+3}$ sind in folgendem Diagramm dargestellt.
Ordnen Sie die Funktionen f und g den Graphen im Diagramm zu.



3.2 Zeigen Sie: Die Funktion F mit $F(x)=4\cdot\left(-e\cdot x-e\right)\cdot e^{-x}$ und G mit $G(x)=-0{,}5\cdot\left(2x+1\right)\cdot e^{-2x+3}$ sind Stammfunktionen der Funktionen f und g.

3.3 Die Beliebtheit der Kandidaten kann durch den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^8 f(x)\,dx$ bzw. $\int_0^8 g(x)\,dx$ ausgedrückt werden, wobei ein größerer Wert größere Beliebtheit anzeigt. Zum Kandidat A gehört der Graph der Funktion g und zum Kandidat B gehört der Graph der Funktion f.
Entscheiden Sie, welcher Kandidat bei dem Wettbewerb beliebter ist.

4 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $g: -e^{-0,5x} + e$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. (Abitur 2022 Teil 1)



Die Funktion $G: x \mapsto 2e^{-0,5x} + ex$ mit der Definitionsmenge $D_G = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts des endlichen Flächenstücks, das der Graph von g mit den Koordinatenachsen im zweiten Quadranten einschließt.

Lösungen

1.1 $F(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}+C$

1.2 $F(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{1-2x}+C$

1.3 $F(x)=\frac{2}{5}\cdot e^{5x+1}+C$

1.4 $f(x)=2\cdot e^{-2x} \quad \Rightarrow F(x)=-e^{-2x}+C$

1.5 $F(x)=x+e^{2-x}+C$

1.6 $F(x)=e^{x}-e^{-x}+C$

1.7 $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

1.8 $f(x)=2e^{-x} \quad \Rightarrow F(x)=-2e^{-x}+C$

1.9 $f(x)=e^{x}\cdot(1-e^{x})^{-2} \quad \Rightarrow F(x)=(1-e^{x})^{-1}+C$

2.1 $\left[\frac{3}{2}e^{2x}\right]_2^1=\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}e^4\approx-70{,}81$

2.2 $\left[e^{x}+\frac{1}{3}e^{3x+1}\right]_2^0=(e^0+\frac{1}{3}e)-(e^2+\frac{1}{3}e^7)\approx1{,}91-372{,}93\approx-371{,}02$

2.3

$$\int_2^{\ln 2}(1-2e^{x}+e^{2x})dx=\left[x-2e^{x}+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_2^{\ln 2}=(\ln 2-2e^{\ln 2}+\frac{1}{2}e^{2\ln 2})-(2-2e^2+\frac{1}{2}e^4)$$

$$=(\ln 2-4+2)-(2-2e^2+\frac{1}{2}e^4)=\ln 2+2e^2-\frac{1}{2}e^4-4\approx-15{,}83$$

3.1

$$f'(x)=4\cdot e^{-x+1}+4x\cdot e^{-x+1}\cdot(-1)=e^{-x+1}\cdot\left(4-4x\right)$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow 4-4x=0 \quad \Rightarrow x=1$$

$$g'(x)=2\cdot e^{-2x+3}+2x\cdot e^{-2x+3}\cdot(-2)=e^{-2x+3}\cdot\left(2-4x\right)$$

$$g'(x)=0 \quad \Rightarrow 2-4x=0 \quad \Rightarrow x=0{,}5$$

3.2

$$F'(x)=4\cdot\left[\left(-e\right)\cdot e^{-x}+\left(-ex-e\right)\cdot e^{-x}\cdot(-1)\right]=$$

$$=4\cdot e^{-x}\cdot\left(-e+ex+e\right)=4x\cdot e^{-x+1}=f(x)$$

$$G'(x)=-0{,}5\cdot\left[2\cdot e^{-2x+3}+\left(2x+1\right)\cdot e^{-2x+3}\cdot(-2)\right]=$$

$$=-0{,}5\cdot e^{-2x+3}\cdot\left(2-4x-2\right)=2x\cdot e^{-2x+3}=g(x)$$

3.3

$$\int_0^8 f(x)dx = \left[4\left(-ex-e\right)\cdot e^{-x}\right]_0^8 = 4\left(-8e-e\right)\cdot e^{-8} - \left(-4e\right) = -36e^{-7} + 4e \approx 10{,}84$$

$$\int_0^8 g(x)dx = \left[-0{,}5\left(2x+1\right)\cdot e^{-2x+3}\right]_0^8 = -8{,}5\cdot e^{-13} - \left(-0{,}5\cdot e^{3}\right) = -8{,}5e^{-13} + 0{,}5e^{3} \approx 10{,}04$$

Kandidat B ist bei dem Wettbewerb beliebter.

4

$$-e^{-0{,}5x} + e = 0 \quad \Rightarrow e^{-0{,}5x} = e \quad \Rightarrow -0{,}5x = 1 \quad \Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow A = \int_{-2}^{0} g(x)dx = \left[2e^{-0{,}5x} + ex\right]_{-2}^{0} = \left(2e^{-0{,}5\cdot 0} + e\cdot 0\right) - \left(2e^{-0{,}5\cdot(-2)} - 2e\right) = 2$$