

Aufgaben zu Integral der e-Funktion

1.0 Geben Sie zu folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an.

1.1 $f(x) = e^{2x}$

1.2 $f(x) = e^{1-2x}$

1.3 $f(x) = 2 \cdot e^{5x+1}$

1.4 $f(x) = \frac{2}{(e^x)^2}$

1.5 $f(x) = 1 - e^{2-x}$

1.6 $f(x) = e^x + e^{-x}$

1.7 $f(x) = x^2 + e^{-2x}$

1.8 $f(x) = \frac{2}{e^x}$

1.9 $f(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$

2.0 Berechnen Sie das bestimmte Integral.

2.1 $\int_2^1 3e^{2x} dx$

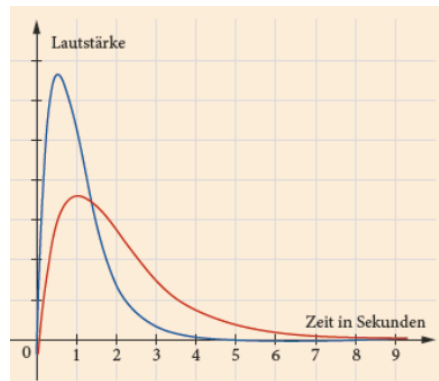
2.2 $\int_2^0 (e^x + e^{3x+1}) dx$

2.3 $\int_2^{\ln 2} (1-e^x)^2 dx$

3.0 Während eines Poetry-Slams wird die Zustimmung zum Vortrag zweier Kandidaten A und B durch die Lautstärke des Applauses des Publikums bestimmt.

3.1 Die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = 4x \cdot e^{-x+1}$ und g mit $g(x) = 2x \cdot e^{-2x+3}$ sind in folgendem Diagramm dargestellt.

Ordnen Sie die Funktionen f und g den Graphen im Diagramm zu.



3.2 Zeigen Sie: Die Funktion F mit $F(x) = 4 \cdot (-e \cdot x - e) \cdot e^{-x}$ und G mit $G(x) = -0,5 \cdot (2x+1) \cdot e^{-2x+3}$ sind Stammfunktionen der Funktionen f und g.

3.3 Die Beliebtheit der Kandidaten kann durch den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^8 f(x) dx \text{ bzw. } \int_0^8 g(x) dx$$

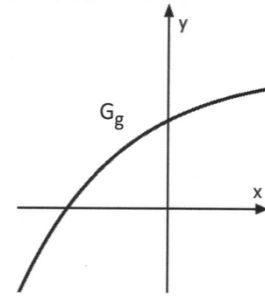
ausgedrückt werden, wobei ein größerer Wert größere

Beliebtheit anzeigt. Zum Kandidat A gehört der Graph der Funktion g und zum Kandidat B gehört der Graph der Funktion f.

Entscheiden Sie, welcher Kandidat bei dem Wettbewerb beliebter ist.

- 4 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion $g: -e^{-0,5x} + e$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. (Abitur 2022 Teil 1)

Die Funktion $G: x \mapsto 2e^{-0,5x} + ex$ mit der Definitionsmenge $D_G = \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts des endlichen Flächenstücks, das der Graph von g mit den Koordinatenachsen im zweiten Quadranten einschließt.



Lösungen

$$1.1 \quad F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

$$1.2 \quad F(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{1-2x} + C$$

$$1.3 \quad F(x) = \frac{2}{5} \cdot e^{5x+1} + C$$

$$1.4 \quad f(x) = 2 \cdot e^{-2x} \Rightarrow F(x) = -e^{-2x} + C$$

$$1.5 \quad F(x) = x + e^{2-x} + C$$

$$1.6 \quad F(x) = e^x - e^{-x} + C$$

$$1.7 \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$1.8 \quad f(x) = 2e^{-x} \Rightarrow F(x) = -2e^{-x} + C$$

$$1.9 \quad f(x) = e^x \cdot (1 - e^x)^{-2} \Rightarrow F(x) = (1 - e^x)^{-1} + C$$

$$2.1 \quad \left[\frac{3}{2}e^{2x} \right]_2^1 = \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2}e^4 \approx -70,81$$

$$2.2 \quad \left[e^x + \frac{1}{3}e^{3x+1} \right]_2^0 = (e^0 + \frac{1}{3}e) - (e^2 + \frac{1}{3}e^7) \approx 1,91 - 372,93 \approx -371,02$$

2.3

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^{\ln 2} (1 - 2e^x + e^{2x}) dx &= \left[x - 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{\frac{1}{2}}^{\ln 2} = (\ln 2 - 2e^{\ln 2} + \frac{1}{2}e^{2\ln 2}) - (\frac{1}{2} - 2e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e^1) \\
 &= (\ln 2 - 4 + 2) - (\frac{1}{2} - 2e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e) = \ln 2 + 2e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}e^1 - 4 \approx -15,83
 \end{aligned}$$

3.1

$$f'(x) = 4 \cdot e^{-x+1} + 4x \cdot e^{-x+1} \cdot (-1) = e^{-x+1} \cdot (4 - 4x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$g'(x) = 2 \cdot e^{-2x+3} + 2x \cdot e^{-2x+3} \cdot (-2) = e^{-2x+3} \cdot (2 - 4x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0,5$$

3.2

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= 4 \cdot [(-e) \cdot e^{-x} + (-ex - e) \cdot e^{-x} \cdot (-1)] = \\
 &= 4 \cdot e^{-x} \cdot (-e + ex + e) = 4x \cdot e^{-x+1} = f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= -0,5 \cdot [2 \cdot e^{-2x+3} + (2x+1) \cdot e^{-2x+3} \cdot (-2)] = \\
 &= -0,5 \cdot e^{-2x+3} \cdot (2 - 4x - 2) = 2x \cdot e^{-2x+3} = g(x)
 \end{aligned}$$

3.3

$$\int_0^8 f(x) dx = \left[4(-ex - e) \cdot e^{-x} \right]_0^8 = 4(-8e - e) \cdot e^{-8} - (-4e) = -36e^{-7} + 4e \approx 10,84$$

$$\int_0^8 g(x) dx = \left[-0,5(2x+1) \cdot e^{-2x+3} \right]_0^8 = -8,5 \cdot e^{-13} - (-0,5 \cdot e^3) = -8,5e^{-13} + 0,5e^3 \approx 10,04$$

Kandidat B ist bei dem Wettbewerb beliebter.

4

$$-e^{-0,5x} + e = 0 \Rightarrow e^{-0,5x} = e \Rightarrow -0,5x = 1 \Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow A = \int_{-2}^0 g(x) dx = \left[2e^{-0,5x} + ex \right]_{-2}^0 = (2e^{-0,5 \cdot 0} + e \cdot 0) - (2e^{-0,5(-2)} - 2e) = 2$$